1 Rätblockets maximala volym

Titeln på uppgiften visar att det handlar om maximering dvs derivata.

Fixa ett uttryck för volymen.

$$f(x) = \frac{x}{3} \cdot (6-x)(6-x) = \qquad (V = b\,h\,l)$$

$$= \left(\frac{6x}{3} - \frac{x^2}{3}\right)(6-x) =$$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{3}\right)(6-x) =$$

Förenkla! Multiplicera ihop parenteserna!

$$= 12x - 2x^2 - \frac{6x^2}{3} - \frac{x^3}{3}$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 2x^2 + 12x$$

$$= \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x$$

Alt 2

$$A(x) = \frac{x}{3} \underbrace{(6-x)(6-x)}_{\text{kvadreringsregeln}}$$

$$= \frac{x}{3}(6-x)^2$$

$$= \frac{x}{3}(36 - 12x + x^2)$$

$$= \frac{36x}{3} - \frac{12x^2}{3} + \frac{x^3}{3}$$

$$= 12x - 4x^2 + \frac{x^3}{3}$$

Om derivatan är 0 $f'(x) = 0$ så är det en max/min/terasspunkt. Vi deriverar och undersöker

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - 8x + 12$$

$$= x^2 - 8x + 12$$

Vi låter $f'(x) = 0$ för att hitta var max/min/terass finns, dvs vid vilket x-värde

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

Pq-formeln ger

$\Rightarrow$

②

$$x = 4 \pm \sqrt{4^2 - 12}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{4}$$

$$x = 4 \pm 2$$

$x_1 = 6$ och $x_2 = 2$ här finns max el min.

Nu behöver undersökas om de är max/min/terass

Det finns två sätt.

1) Teckentabell

		2		6	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	max	↘	min	↗

② Andra derivatan

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12$$

$$f''(x) = 2x - 8$$

$$f''(2) = 2 \cdot 2 - 8 = -4 < 0$$

då är det maxpunkt

$$f''(6) = 2 \cdot 6 - 8 = 4 > 0$$

då är det en minpunkt

Det är alltså $x = 2$ som det handlar om för att få max volym. Hur stor är då denna volym.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} - 4 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2$$

$$= \frac{8}{3} - 16 + 24$$

$$= \frac{8}{3} - 8 \approx 10{,}7 \text{ V:e}$$ (volymsenheter)

Svar: 10,7 V:e

2 Derivatans värde

a) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7$

$f'(x) = 3x^2 + 10x$

$f'(4) = 3 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4$

$= 3 \cdot 16 + 40$

$= 88$

b) Ändringskvot är detsamma som differenskvot
Det betyder att man räknar ut derivatan
med hjälp av två punkter som ligger
väldigt nära $x = 4$. Ungefär som när
vi räknade $\left(k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$ i åk 2.

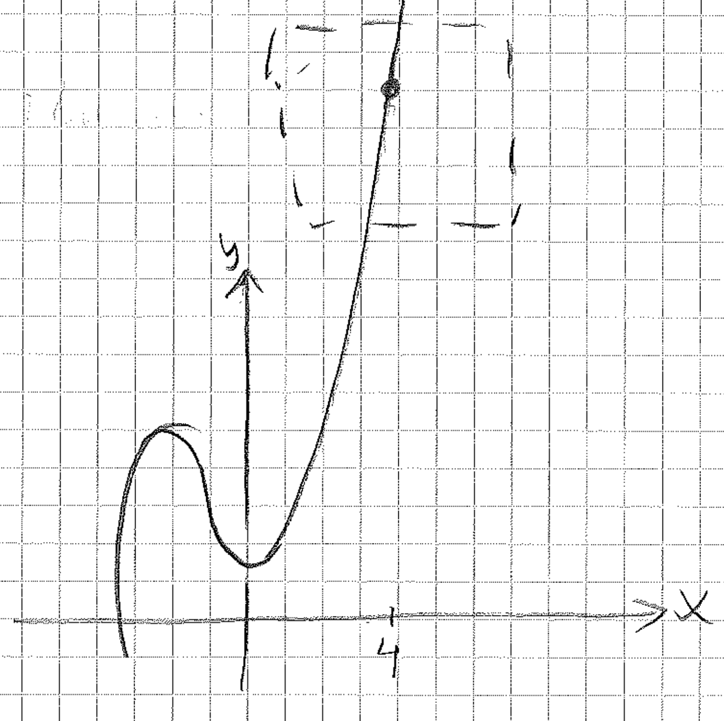
Jag väljer ett litet avstånd 0,1 så jag
får punkterna $x = 3,9$ o. $x = 4,1$

$$f'(4) = \frac{f(4,1) - f(3,9)}{4,1 - 3,9} = \frac{(4,1^3 + 5 \cdot 4,1^2 + 7) - (3,9^3 + 5 \cdot 3,9^2 + 7)}{0,2} =$$

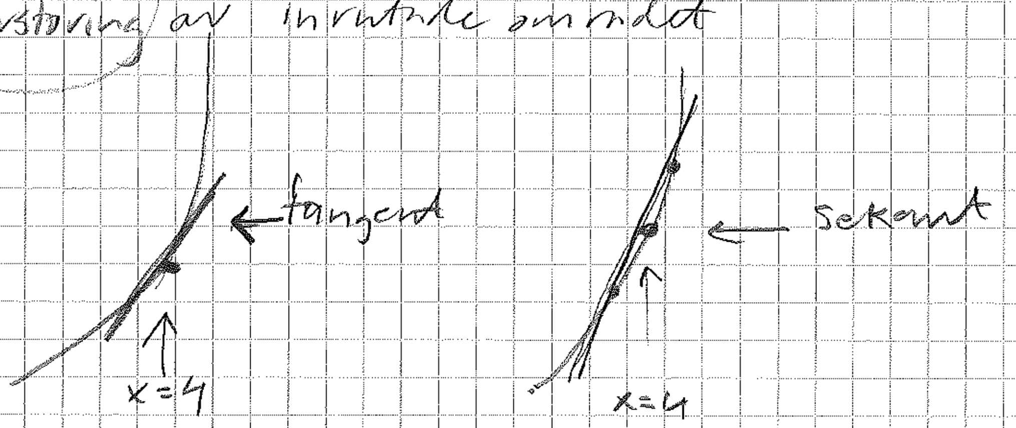
Jag sätter in x-värdet
och räknar ut med
miniräknaren

$$= \frac{159,971 - 142,369}{0,2} = 88,01$$

c)



Förstoring av inrutade området



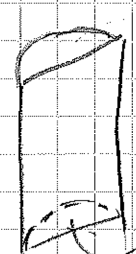
f'(4) ger exakt värde på tangentens lutning i punkten

Att räkna med differenskvot då får man ett ungefärligt värde eftersom det blir ett medelvärde mellan två punkter. Ju närmre punkterna kommer 4 desto mer exakt värde.

3 Jordvallen

I den här uppgiften behöver man förstå att man skall beräkna arean alltså integralen.

Om man räknar arean och tänker att jordvallen är en halvcylinder så kan man sedan beräkna volymen. Längden på vallen är höjden.



← höjd 1km = 1000 m

← att beräkna integralen ger bottenarean.

$$\int_a^b 2-0{,}125x^2\,dx$$

men jag saknar a o b dvs mellan vilka gränser jag skall beräkna arean.

Jag söker funktionens nollställen och sätter därför $y=0$, dvs

$$0=2-0{,}125x^2$$

$$\frac{0{,}125x^2}{0{,}125}=\frac{2}{0{,}125}$$

$$x^2=16$$

$x=\pm 4$ nu har jag att $b=4$ och $a=-4$

$$\int_{-4}^{4} 2-0{,}125x^2\,dx=\left[2x-\frac{0{,}125x^3}{3}\right]_{-4}^{4}=$$

$$=\left(2\cdot 4-\frac{0{,}125\cdot(4)^3}{3}\right)-\left(2\cdot(-4)-\frac{0{,}125\cdot(-4)^3}{3}\right)=$$

Sätt parenteser o håll koll på alla minustecken

6

$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - \frac{(-8)}{3}\right) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) =$$

$$= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = 10{,}67\ m^2$$

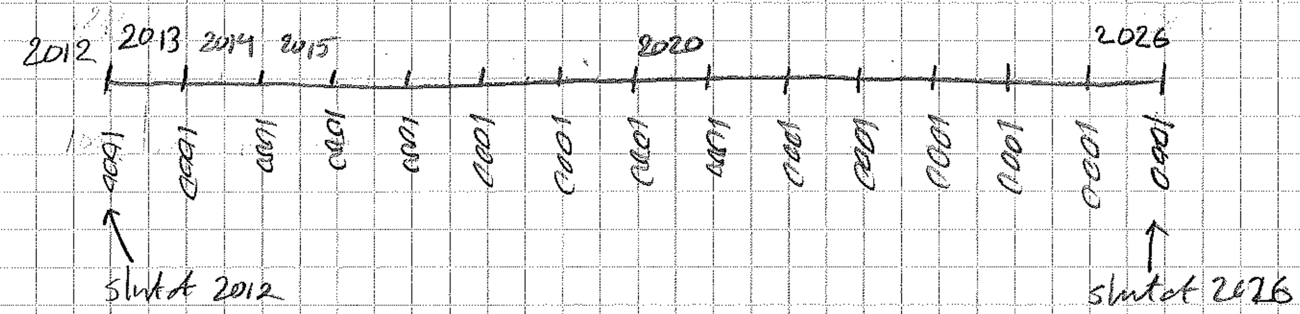
Nu har vi basarean och kan beräkna volymen

$$V = B \cdot h = 10{,}67 \cdot 1000 = 10670\ m^3$$

4 Insättning av pengar

Det är pengar som skall sparas vid upprepade tillfällen. Det handlar om geometrisk summa.

Beata.



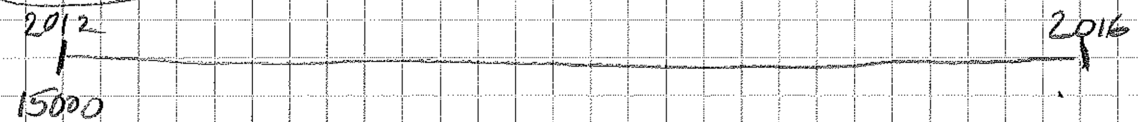
Beloppet beräknas med geometrisk summa.

$$s_n = \frac{a(k^n-1)}{k-1}$$

n = antal insättningar dvs 15 st

$$s_{15} = \frac{1000(1{,}02^{15}-1)}{1{,}02-1} = 17293{,}42 \approx 17293 \text{ kr}$$

Andrea



antal år

$$y = C \cdot a^x$$

$$y = 15000 \cdot 1{,}02^{15} = 20188{,}03 \approx 20188 \text{ kr}$$

Startbelopp ränta