Matematik

Elevhäfte

2b

Skolverket

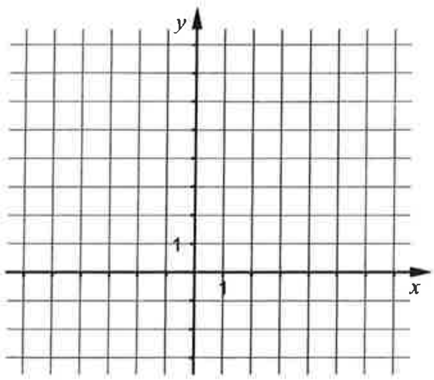
Matematik kurs 2b och 2c - Exempeluppgifter

OBSERVERA ATT DETTA EXEMPELMATERIAL INTE MOTSVARAR ETT HELT KURSPROV I OMFATTNING OCH INNEHÅLL.

Del I: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs.* Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. En rät linje går genom punkterna (0, 2) och (4, 0)

a) Rita linjen i koordinatsystemet. (1/0/0)



b) Ange linjens ekvation ________________(1/0/0)

2. Lös ekvationerna.

a) $10^x = 8$ ________________(1/0/0)

b) $5 \cdot 3^{x+1} = 20$ ________________(0/1/0)

3. Förenkla uttrycket $(3x-2)^2 + 4(3x-1)$ så långt som möjligt.

________________(0/1/0)

5

4. Patrik ska handla lösviktsgodis. Han tänker köpa 5 hg godis och har 30 kronor att handla för. I godisaffären finns två olika priser på lösviktsgodis. Det dyrare godiset kostar 8 kr/hg och det billigare 5 kr/hg. Patrik frågar sig: Hur många hekto ska han köpa av de två godissorterna för att det ska kosta 30 kr?

Ställ upp ett ekvationssystem vars lösning ger Patrik svar på sin fråga.

________________(0/1/0)

5. I figuren visas grafen till andragradsfunktionen f.

Vilket av alternativen A-D nedan skulle kunna ange funktionen f?

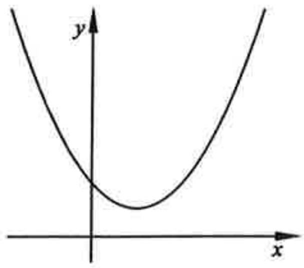
A. $f(x) = x^2 - 4x + 6$

B. $f(x) = -x^2 - 4x + 6$

C. $f(x) = x^2 - 6x + 6$

D. $f(x) = x^2 - 10x - 6$

E. $f(x) = x^2 - 10x + 6$



________________(0/0/1)

Del II: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

6. Lös ekvationen $x^2-6x-16=0$ algebraiskt. (2/0/0)

7. Två linjer $y=2x+5$ och $y=kx+m$ skär varandra i en enda punkt. Den punkten ligger på y-axeln.

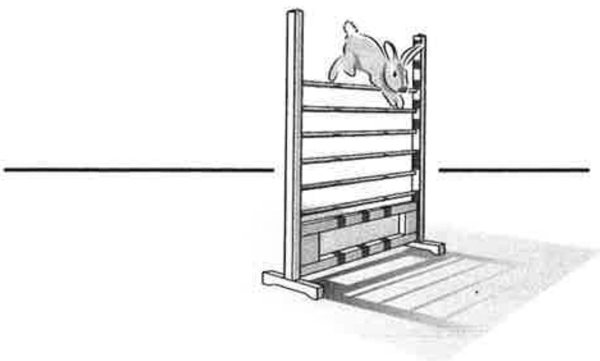
Vilka värden kan riktningskoefficienten k ha? Motivera. (0/1/1)

8. Kaninen Tösen från Danmark satte 1997 världsrekord i höjdhopp för kaniner. Enligt en modell gäller att Tösens höjd under hoppet ges av

$h(x)=4x-4x^2$

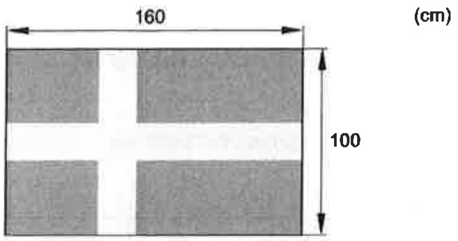
där h är höjden i meter över golvet och där x är avståndet i meter längs golvet från avstampet.

Hur högt hoppade kaninen Tösen? (0/2/0)



Del III: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

9. En svensk flagga med långsidan 160 cm och kortsidan 100 cm uppfyller gällande flagglag. Anna vill göra en liten bordsflagga med kortsidan 8 cm.



Hur lång ska Anna göra sin flagga för att den ska vara likformig med den stora flaggan? (2/0/0)

10. Företaget Rund Plast AB tillverkar bland annat innebandybollar. Varje månad tillverkas 50 000 innebandybollar.

Efter klagomål från kunder beslöt Rund Plast AB:s ledning att göra en kvalitetskontroll. Under en månad kontrollerades kvaliteten på var 200:e innebandyboll som tillverkades. Man hittade 11 bollar som var av dålig kvalitet.

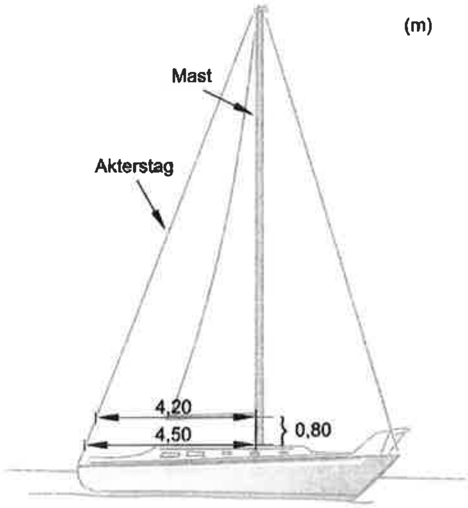
a) Här ovan beskrivs en stickprovsundersökning. Hur stort var stickprovet? (1/0/0)

b) Hur många av de innebandybollar som tillverkades under en månad kan antas ha varit av dålig kvalitet? (2/0/0)

11. En rät linje har riktningskoefficienten $k = 1{,}2$ och skär y-axeln i punkten (0, 3)

Avgör om punkten (175, 207) ligger på linjen. (2/0/0)

12. Lina och Sara är ute och seglar i en båt som de har lånat. De seglar mot en bro och börjar fundera på om masten är för hög för att båten ska kunna passera under bron. För att kunna bestämma mastens höjd gör de några mätningar.



Lina och Sara mäter avståndet från mastens fot och rakt ut mot akterstaget och finner att det är 4,50 m. Sedan mäter de avståndet från masten till akterstaget 0,80 m högre upp och parallellt med första mätningen. Det avståndet är 4,20 m. Se figur.

Använd de mätningar som Lina och Sara har gjort och bestäm mastens höjd. (0/2/0)

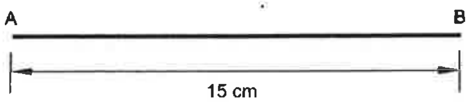
13. Fia springer på ett löpband som kan ställas in på olika hastigheter. På en display kan hon avläsa hur mycket energi hon förbrukar under ett träningspass på löpbandet. Energin anges i enheten kcal.

Fia brukar först ställa in löpbandet på hastigheten 8 km/h ("låg" hastighet) för att sedan öka hastigheten till 12 km/h ("hög" hastighet).
Tabellen visar exempel på Fias träningspass på löpbandet.

	Tid		Energiförbrukning
	"låg" hastighet	"hög" hastighet	
Träningspass 1	20 min	10 min	300 kcal
Träningspass 2	10 min	15 min	280 kcal

Hur mycket energi per minut (kcal/min) förbrukar Fia då hon springer med "låg" respektive "hög" hastighet? (0/3/0)

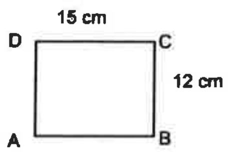
14. En sträcka AB är 15 cm lång. Sträckan kan delas i fem delsträckor på olika sätt. Längden av varje delsträcka måste vara större än noll.

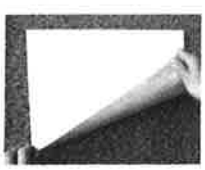


a) Gör en indelning av sträckan AB så att variationsbredden för delsträckornas längder blir 12,5 cm. (1/1/0)

b) Beroende på hur man delar in sträckan AB i fem delsträckor kan variationsbredden variera. Utred vilka värden som är möjliga för variationsbredden när man ändrar på de fem delsträckornas längder. (0/1/1)

15. ABCD är ett vitt rektangelformat pappersark med grå baksida (se vänstra figuren). Arket viks så att vikningslinjen går genom hörnet A och så att hörnet B hamnar på sidan CD (se högra figuren).





Beräkna arean av den uppvikta (grå) delen av pappersarket. (0/0/4)

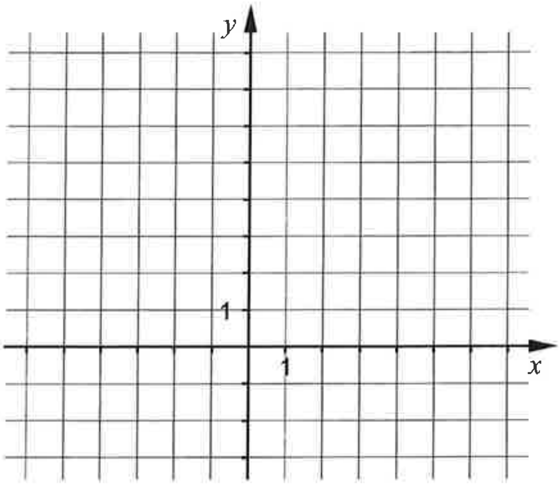
Beräkningar som bygger på uppmätta värden godtas ej.

Ma2 EXEMPELUPPGIFTER LÖSNINGAR

Del I # 1 (2/0/0) Linje & ekvation

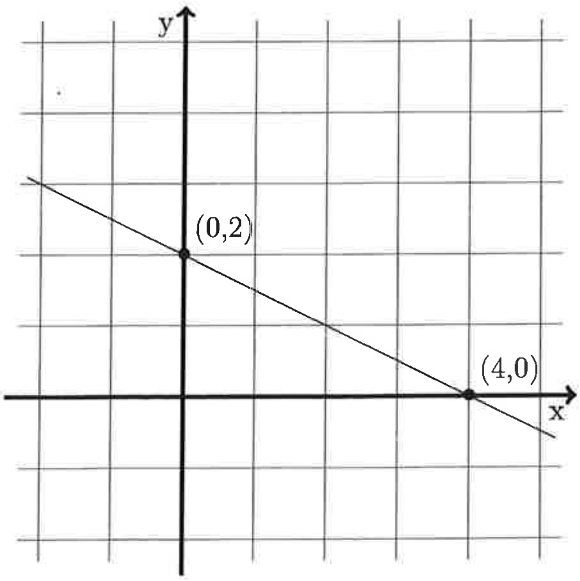
1. En rät linje går genom punkterna (0, 2) och (4, 0)

a) Rita linjen i koordinatsystemet. (1/0/0)



b) Ange linjens ekvation ________________ (1/0/0)

a)



Svar a) Se figur ovan

b) Bestäm linjen

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-2}{4-0} = -0{,}5$$

$$m = 2$$

Svar b) $y = -0{,}5 \cdot x + 2.$

Del I # 2 (1/1/0) Två exponentialekvationer

2.	Lös ekvationerna.		
	a) $10^x = 8$	________________	(1/0/0)
	b) $5 \cdot 3^{x+1} = 20$	________________	(0/1/0)

a) Ekvationen är en exponentialekvation. Logaritmera ekvationen. Vi får

$$\log 10^x = \log 8. \tag{1}$$

Använd FORMELSAMLINGEN. Där finns regler för logaritmer.

Logaritmer

$y = 10^x \Leftrightarrow x = \lg y$

$\lg x + \lg y = \lg xy$ $\quad \lg x - \lg y = \lg \frac{x}{y}$ $\quad \lg x^p = p \cdot \lg x$

Ekvation (1) ger

$$x \log 10 = \log 8$$

$$x = \frac{\log 8}{\log 10}$$

Svar a) $x = \dfrac{\log 8}{\log 10}.$

b) Ekvationen är en exponentialekvation. Börja med att flytta om faktorer så att ekvationen får formen $a^x = b$. I FORMELSAMLINGEN finns räkneregler för potenser.

Potenser			
$a^x a^y = a^{x+y}$	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$(a^x)^y = a^{xy}$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
$a^x b^x = (ab)^x$	$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a^0 = 1$

Utgångspunkten är ekvationen

$$5 \cdot 3^{x+1} = 20$$

som ger

$$5 \cdot 3 \cdot 3^x = 20$$

$$3^x = \frac{20}{5 \cdot 3} = \frac{4}{3}$$

Logaritmera

$$\log 3^x = \log \frac{4}{3}$$

och använd räknereglerna för logaritmer. Vi får

$$x \cdot \log 3 = \log \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{\log \frac{4}{3}}{\log 3}$$

Svar b) $x = \dfrac{\log \frac{4}{3}}{\log 3}$.

Kommentar Svaret kan skrivas på många olika former. Om vi använder räkneregeln för logaritmer

$$\log x - \log y = \log \frac{x}{y}$$

kan svaret uttryckas som

$$x = \frac{\log 4}{\log 3} - 1.$$

Del I # 3 (0/1/0) Förenkla

3. Förenkla uttrycket $(3x-2)^2+4(3x-1)$ så långt som möjligt.

(0/1/0)

$$\underbrace{(3x-2)^2}_{(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 2+2^2} + \underbrace{4\,(3x-1)}_{12x-4}$$

$$9x^2-12x+4+12x-4$$

$$9x^2$$

Svar $9\,x^2$

Del I # 4 (0/1/0) Ställ upp linjära ekvationer

4. Patrik ska handla lösviktsgodis. Han tänker köpa 5 hg godis och har 30 kronor att handla för. I godisaffären finns två olika priser på lösviktsgodis. Det dyrare godiset kostar 8 kr/hg och det billigare 5 kr/hg. Patrik frågar sig: Hur många hekto ska han köpa av de två godissorterna för att det ska kosta 30 kr?

Ställ upp ett ekvationssystem vars lösning ger Patrik svar på sin fråga.

(0/1/0)

Inför variabler. Han köper x hg av det dyra och y hg av det billiga godiset. Totalt köper han 5 hg godis. Vi får ekvationerna

$$\begin{aligned} x+\ \ y &= 5 && \text{kravet 5 hg godis} \\ 8x+5y &= 30 && \text{kravet 30 kronor godis.} \end{aligned}$$

Svar se ovan.

Del I # 5 (0/0/1) 2:a gradsfunktion & graf

5. I figuren visas grafen till andragradsfunktionen f.

Vilket av alternativen A-D nedan skulle kunna ange funktionen f?

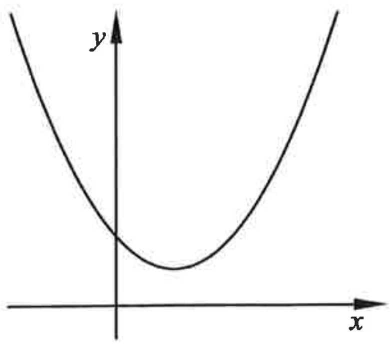
A. $f(x) = x^2 - 4x + 6$

B. $f(x) = -x^2 - 4x + 6$

C. $f(x) = x^2 - 6x + 6$

D. $f(x) = x^2 - 10x - 6$

E. $f(x) = x^2 - 10x + 6$



__________(0/0/1)

Några alternativ kan uteslutas direkt.

A	$f(x)= x^2 - 4x + 6$	
B	$f(x)=-x^2 - 4x + 6$	$-x^2$ ger felvänd graf med maximum
C	$f(x)= x^2 - 6x + 6$	
D	$f(x)= x^2 - 10x - 6$	$f(0) = -6$ och grafen ska vara ovanför x-axeln
E	$f(x)= x^2 - 10x + 6$	

Uteslut alternativ B och D. Det finns olika alternativa lösningar på fortsättningen.

Alternativ 1

En matematiskt enkel men arbetsam möjlighet är att med pq-formeln beräkna rötterna till falllen A, C och E. Om man gör det får man att fallet A har komplexa rötter och därmed skär inte grafen x-axeln.

Svar Fallet A svarar mot grafen.

Alternativ 2

En 2:a gradsfunktion

$$0 = x^2 + px + q$$

har sitt max/min-värde på symmetrilinjen och ekvationen för symmtrilinjen är

$$x = \frac{-p}{2}$$

	$f(x)$	$\frac{-p}{2}$	$f(\frac{-p}{2})$	slutsats
A	$x^2 - 4x + 6$	2	2	RÄTT skär inte x-axeln
C	$x^2 - 6x + 6$	3	-3	FEL skär x-axeln
E	$x^2 - 10x + 6$	4	-18	FEL skär x-axeln

Svar Fallet A svarar mot grafen.

Del II # 6 (2/0/0) Lös ekvationen algebraiskt.

6. Lös ekvationen $x^2 - 6x - 16 = 0$ algebraiskt. (2/0/0)

Använd FORMELSAMLINGEN. Där finns pq-formeln.

Regler	**Andragradsekvationer**
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$x^2 + px + q = 0$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Ekvationen är

$$0 = x^2 \underbrace{-6}_{p=-6} \cdot x \underbrace{-16}_{q=-16}$$

och lösningen blir

$$x = \frac{-(-6)}{2} \pm \sqrt{3^2 - (-16)}$$
$$x = 3 \pm \sqrt{9 + 16}$$
$$x = 3 \pm \sqrt{25}$$
$$x = 3 \pm 5$$
$$x_1 = 8$$
$$x_2 = -2$$

Svar $x_1 = 8$ och $x_2 = -2$.

Del II # 7 (0/1/1) Två linjer

7.	Två linjer $y = 2x + 5$ och $y = kx + m$ skär varandra i en enda punkt. Den punkten ligger på y-axeln. Vilka värden kan riktningskoefficienten k ha? Motivera.	(0/1/1)

Första linjen

$$y = 2x + 5$$

skär y-axeln i punkten $(0, 5)$. Andra linjen går också genom punkten $(0, 5)$. Då kan vi bestämma m i den andra ekvationen. Stoppa in $x = 0$ och $y = 5$ i räta linjens ekvation, ut trillar $m = 5$,

$$\overbrace{y}^{5} = k\overbrace{x}^{0} + \underbrace{m}_{5}.$$

Riktningskoefficienten k är inte bestämd. Ekvationssystemet

$$y = 2x + 5$$
$$y = kx + 5$$

har alltså punkten $(0, 5)$ som lösning oberoende av värdet på k. När $k = 2$ är de två linjerna identiska och lösningen är inte entydig. Varje punkt på linjerna är en lösning till ekvationssystemet. Enligt kravet i uppgiften ska linjerna skära varandra i en enda punkt. Riktningskoefficienten k kan alltså ha alla värden utom $k = 2$.

Svar $k \neq 2$.

Kommentar Tecknet $\neq$ är internationell standard för *inte lika med.*

Kommentar I Skolverkets norm för rättning står följande.

7. **Max 0/1/1**

E	C	A
	Godtagbart resonemang som inte behöver vara helt fullständigt, (t.ex. "k får inte vara 2 för då är linjerna parallella.") $1C_R$	Godtagbart resonemang som är fullständigt, (t.ex. "k kan ha vilka värden som helst utom 2 för då är linjerna parallella och identiska och har då alla punkter gemensamma.") $1C_R$ och $1A_R$

Var noga med svaren på A-nivå. Glöm inte det du tycker är självklart.

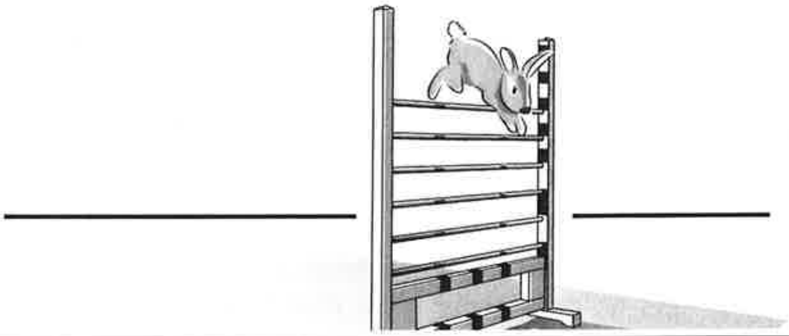
Del II # 8 (0/2/0) Kaninen Tösen från Danmark

8. Kaninen Tösen från Danmark satte 1997 världsrekord i höjdhopp för kaniner. Enligt en modell gäller att Tösens höjd under hoppet ges av

$h(x) = 4x - 4x^2$

där h är höjden i meter över golvet och där x är avståndet i meter längs golvet från avstampet.

Hur högt hoppade kaninen Tösen? (0/2/0)



Finn maximum hos funktionen

$$h(x) = 4x - 4x^2.$$

Gör en skiss av kurvan. Grafiska hjälpmedel är inte tillåtna. Maximum finns på symmetrilinjen som ligger mitt emellan funktionens nollställen. Bestäm nollställen. Enklast är att dela upp funktionen i faktorer. Vi får

$$h(x) = 4\underbrace{x}_{x=0}\cdot\underbrace{(1-x)}_{x=1}$$

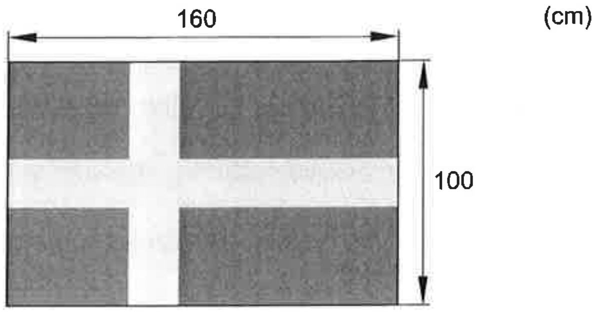
Symmetrilinjen ligger mitt emellan 2:a gradsfunktionens nollställen, alltså $x = 0{,}5$. Maxvärdet blir

$$h(0{,}5) = 4\cdot 0{,}5 - 4\cdot 0{,}5^2 = 1.$$

Svar Kaninen hoppade 1 m.

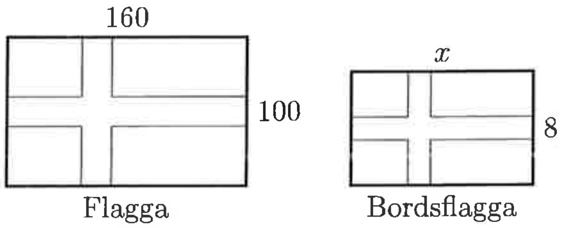
Del III # 9 (2/0/0) Likformighet, flagga

9. En svensk flagga med långsidan 160 cm och kortsidan 100 cm uppfyller gällande flagglag. Anna vill göra en liten bordsflagga med kortsidan 8 cm.



Hur lång ska Anna göra sin flagga för att den ska vara likformig med den stora flaggan? (2/0/0)

Figuren illustrerar flagga och bordflagga.



Lösning variant 1

$$\begin{aligned} \frac{\text{bordsflaggan}}{\text{flaggan}} &= \frac{x}{160} = \frac{8}{100} \\ x &= 12{,}8 \end{aligned}$$

Lösning variant 2

$$\begin{aligned} \frac{\text{långsida}}{\text{kortsida}} &= \frac{160}{100} = \frac{x}{8} \\ x &= 12{,}8 \end{aligned}$$

Svar Anna ska göra flaggan 12,8 cm lång.

Del III # 10 (2/0/0) Statistik

10. Företaget Rund Plast AB tillverkar bland annat innebandybollar. Varje månad tillverkas 50 000 innebandybollar.

Efter klagomål från kunder beslöt Rund Plast AB:s ledning att göra en kvalitetskontroll. Under en månad kontrollerades kvaliteten på var 200:e innebandyboll som tillverkades. Man hittade 11 bollar som var av dålig kvalitet.

a) Här ovan beskrivs en stickprovsundersökning. Hur stort var stickprovet? (1/0/0)

b) Hur många av de innebandybollar som tillverkades under en månad kan antas ha varit av dålig kvalitet? (2/0/0)

a) Av totalt 50 000 bollar testas var 200:e boll. Det betyder att $\frac{50\,000}{200} = 250$ bollar utgör stickprovet.

Svar a) Stickprovet är 250 bollar.

b) Av stickprovets 250 bollar är 11 dåliga. Andelen dåliga bollar i stickprovet är $\frac{11}{250}$. Med antagandet att samma andel av de tillverkade bollarna är dåliga blir antalet dåliga bollar $\frac{11}{250} \times 50\,000 = 2200$ stycken.

Svar b) 2200 dåliga bollar.

Del III # 11 (3/0/0) Rät linje

11.	En rät linje har riktningskoefficienten $k = 1{,}2$ och skär y-axeln i punkten $(0, 3)$	
	Avgör om punkten $(175, 207)$ ligger på linjen.	(2/0/0)

Enligt FORMELSAMLINGEN gäller följande.

Räta linjen		**Andragradsfunktioner**	
$y = kx + m$	$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$y = ax^2 + bx + c$	$a \neq 0$

Ekvationen för den räta linjens är

$$y = 1{,}2 \cdot x + 3$$

eftersom $k = 1{,}2$ är given i uppgiften och linjen går genom punkten $(0, 3)$.
Kontrollera om punkten $(175, 207)$ ligger på linjen. Stoppa in $x = 175$ i linjens ekvation

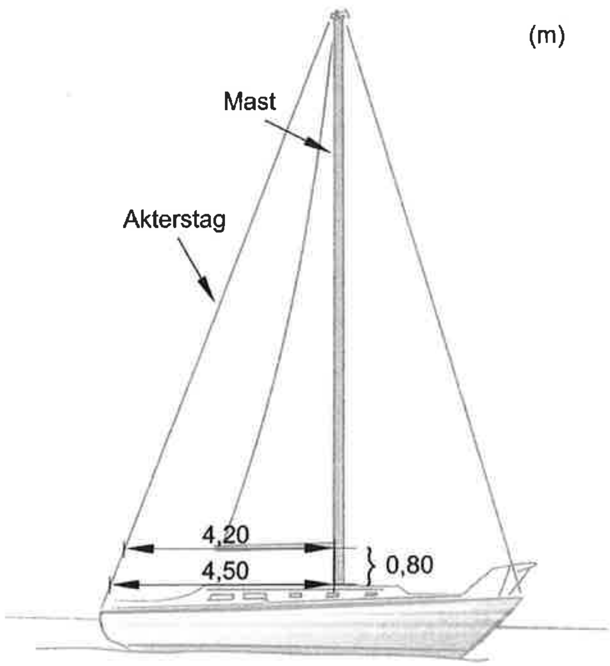
$$\underbrace{y}_{213} = 1{,}2 \cdot \overbrace{x}^{175} + 3$$

ut trillar $y = 213$.
När $x = 175$ blir $y = 213$ och punkten $y = 207$ ligger alltså inte på linjen.

Svar Punkten $(175, 207)$ ligger inte på linjen.

Del III # 12 (0/2/0) Likformighet

12. Lina och Sara är ute och seglar i en båt som de har lånat. De seglar mot en bro och börjar fundera på om masten är för hög för att båten ska kunna passera under bron. För att kunna bestämma mastens höjd gör de några mätningar.



Lina och Sara mäter avståndet från mastens fot och rakt ut mot akterstaget och finner att det är 4,50 m. Sedan mäter de avståndet från masten till akterstaget 0,80 m högre upp och parallellt med första mätningen. Det avståndet är 4,20 m. Se figur.

Använd de mätningar som Lina och Sara har gjort och bestäm mastens höjd. (0/2/0)

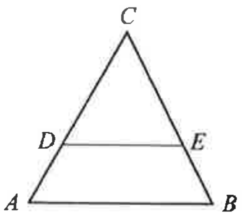
Använd FORMELSAMLINGEN.

Topptriangel- och transversalsatsen

Om DE är parallell med AB gäller

$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{BC} \text{ och}$$

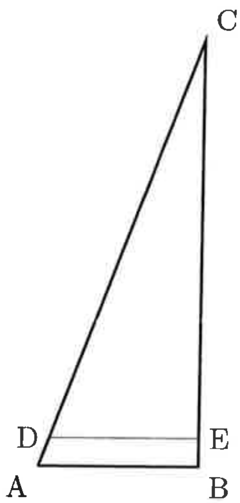
$$\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{BE}$$



Bisektrissatsen

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

Rita Figur.



AB = 4,50
DE = 4,20
BE = 0,80
BC = x
CE = x - 0,80

$$\frac{4,20}{4,50} = \frac{x - 0,80}{x}$$

$$\frac{4,20}{4,50} = 1 - \frac{0,80}{x}$$

$$\frac{0,80}{x} = \frac{4,50 - 4,20}{4,50}$$

$$x = 0,80 \cdot \frac{4,50}{4,50 - 4,20} = 12$$

Svar Mastens höjd är 12 m.

Kommentar Små mätfel i AB eller DE ger stora fel i AC. Med DE=4,29 istället för 4,30 cm blir mastens höjd 11,6 m.

Del III # 13 (0/3/0) Motion med linjära ekvationer

13. Fia springer på ett löpband som kan ställas in på olika hastigheter. På en display kan hon avläsa hur mycket energi hon förbrukar under ett träningspass på löpbandet. Energin anges i enheten kcal.

Fia brukar först ställa in löpbandet på hastigheten 8 km/h ("låg" hastighet) för att sedan öka hastigheten till 12 km/h ("hög" hastighet).
Tabellen visar exempel på Fias träningspass på löpbandet.

	Tid		Energiförbrukning
	"låg" hastighet	"hög" hastighet	
Träningspass 1	20 min	10 min	300 kcal
Träningspass 2	10 min	15 min	280 kcal

Hur mycket energi per minut (kcal/min) förbrukar Fia då hon springer med "låg" respektive "hög" hastighet? (0/3/0)

Inför variabler. Låt x vara energiförbrukning i kcal/min vid "låg" hastighet och y vid "hög" hastighet.

Steg-1: Skapa ett ekvationssystem med två linjära ekvationer.

$20x + 10y = 300$ 1:a ekvationen (1)

$10x + 15y = 280$ 2:a ekvationen (2)

Steg-2: Lös ekvationssystemet (skapa triangulärt system).

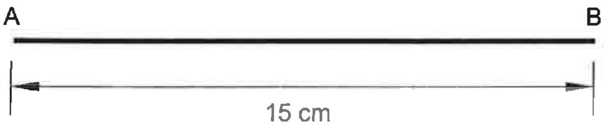
$$20x + 10y = 300 \quad \text{behåll 1:a ekvationen} \qquad (3)$$
$$+ 10y = 130 \quad \text{ekvation (4) = ekvation (2) - } \tfrac{1}{2} \times \text{ ekvation (1)} \qquad (4)$$

Steg-3: Lös först ekvation (4) och sedan (3).
Ekvation (4) ger $y = 13$ och med $y = 13$ ger ekvation (3) att $x = 8{,}5$.

Svar Fia förbrukar 8,5 kcal/min då hon springer med "låg" respektive 13 kcal/min vid "hög" hastighet.

Del III # 14 (1/2/1) Variationsbredd

14. En sträcka *AB* är 15 cm lång. Sträckan kan delas i fem delsträckor på olika sätt. Längden av varje delsträcka måste vara större än noll.



a) Gör en indelning av sträckan *AB* så att variationsbredden för delsträckornas längder blir 12,5 cm. (1/1/0)

b) Beroende på hur man delar in sträckan *AB* i fem delsträckor kan variationsbredden variera. Utred vilka värden som är möjliga för variationsbredden när man ändrar på de fem delsträckornas längder. (0/1/1)

a) Dela in sträckan 15 cm i 5 delar och sortera delarna i storleksordning. Vi får

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \qquad (1)$$

och

$$15 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5. \qquad (2)$$

Variationsbredden är $x_{max} - x_{min}$. Konkret i detta problem gäller

$$12{,}5 = x_5 - x_1. \qquad (3)$$

Ekvation (2) och (3) ger

$$15 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 12,5 + x_1$$
$$2{,}5 = \underbrace{x_1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4}_{5 \text{ termer}}. \qquad (4)$$

Det finns naturligtvis många olika möjligheter att välja x_1, x_2, x_3 och x_4 så att ekvation (4) blir uppfylld. Välj något enkelt, välj alla 5 termer lika. Ekvation (4) ger

$$0{,}5 = x_1 = x_2 = x_3 = x_4$$

Med vald lösning ger (2)

$$15 = \overbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}^{0{,}5\,+\,0{,}5\,+\,0{,}5\,+\,0{,}5} + \underbrace{x_5}_{13}.$$

Svar a) En möjlig indelning är 0,5 0,5 0,5 0,5 och 13 cm.

b) Studera mellan vilka gränser variationsbredden kan variera. Med alla delar lika $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 3\,\text{cm}$ blir variaitonsbredden 0.

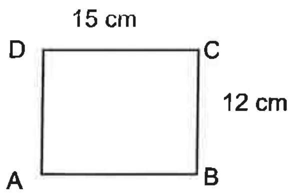
$$15 = \underbrace{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}_{\text{små termer}} + \underbrace{x_5}_{\text{stor term}}$$

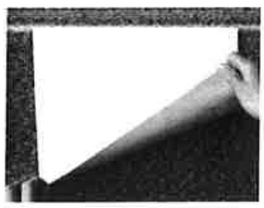
Med små värden på x_1, x_2, x_3 och x_4 blir variationsbredden $x_5 - x_1 < 15$. Likhet kan inte uppnås eftersom $0 < x_1$.

Svar b) $0 \leq$ variationsbredd < 15 cm.

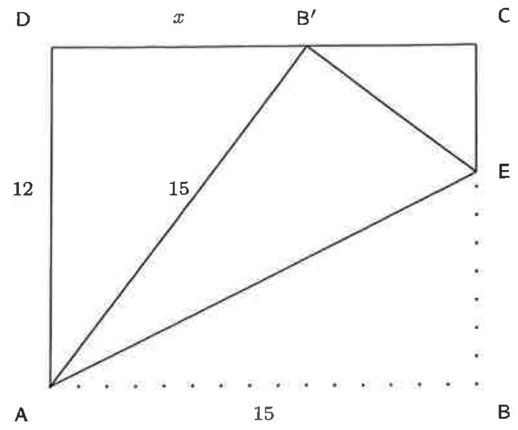
Del III # 15 (0/0/4) Vikt pappersark

15. ABCD är ett vitt rektangelformat pappersark med grå baksida (se vänstra figuren). Arket viks så att vikningslinjen går genom hörnet A och så att hörnet B hamnar på sidan CD (se högra figuren).





Beräkna arean av den uppvikta (grå) delen av pappersarket. (0/0/4)
Beräkningar som bygger på uppmätta värden godtas ej.



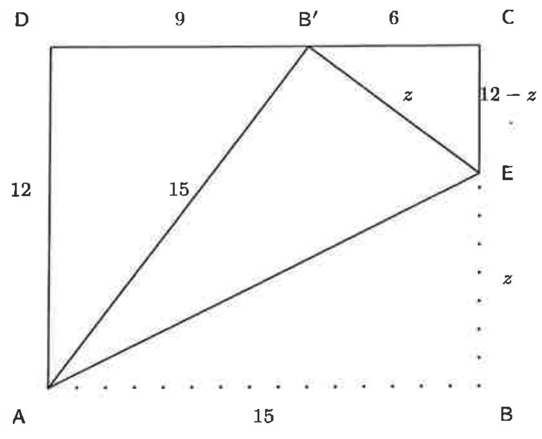
Börja med att rita figuren. Vik upp hörnet B så att det hamnar på sidan CD och kalla punkten för B′ (uttalas B-prim). Bestäm längden av sidan DB′ i triangeln ADB′ med hjälp av Pythagoras sats.

$$15^2 = 12^2 + x^2$$

ger

$$x = 9.$$

Då längden av sidan DB′ är 9 cm blir längden av B′C $15 - 9 = 6$ cm.



Längden av EB och EB′ är lika, kalla längden för z. Triangeln B′CE är rätvinklig. Pythagoras sats ger

$$
\begin{aligned}
z^2 &= 6^2 + \underbrace{(12-z)^2}_{144-24\,z+z^2} \\
0 &= 36 + 144 - 24\,z \\
z &= \frac{36+144}{24} = \frac{180}{24} = 7,5
\end{aligned}
$$

Arean hos triangeln AB′E blir

$$\text{area} = \frac{15\cdot 7,5}{2} = 56,25$$

Svar Arean är $56,25\ \text{cm}^2$.

Andra lösningar

Triangeln ADB′ har vinkelsumman 180°

$$180^\circ = \angle DB'A + \angle B'AD + 90^\circ$$

Vinkeln vid punkten B' är 180° och består av tre olika delar

$$180^\circ = \angle DB'A + 90^\circ + \angle EB'C$$

Då gäller att

$$\angle B'AD = \angle EB'C$$

De rätvinkliga trianglarna ADB′ och B′CE måste nu ha alla vinklar lika och är därmed likformiga. Denna kunskap kan anvädas i stället för Pythagoras sats vid lösningen av uppgiften.